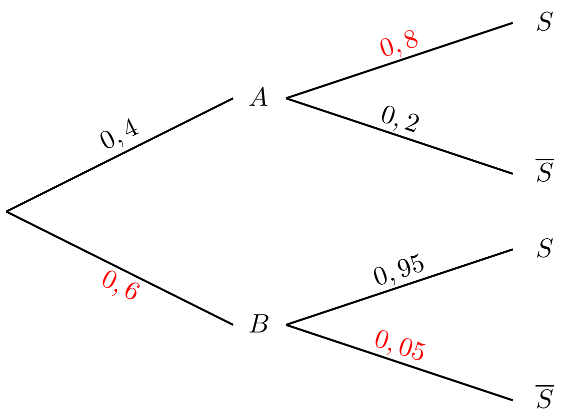
France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) \\ &= 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,95 = 0,32 + 0,57 = 0,89. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(S) = 0,89.}$$

2) La probabilité demandée est $P_S(A)$.

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,89} = \frac{32}{89} = 0,36 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

$$\boxed{P_S(A) = 0, \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

Partie B

1) Ici $n = 400$ et $f = 0,92$. On note que $nf = 368$ et $n(1-f) = 32$ de sorte que $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{400}}, 0,92 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,87; 0,97].$$

La proportion p appartient à l'intervalle $[0,87; 0,97]$ au niveau de confiance 95%.

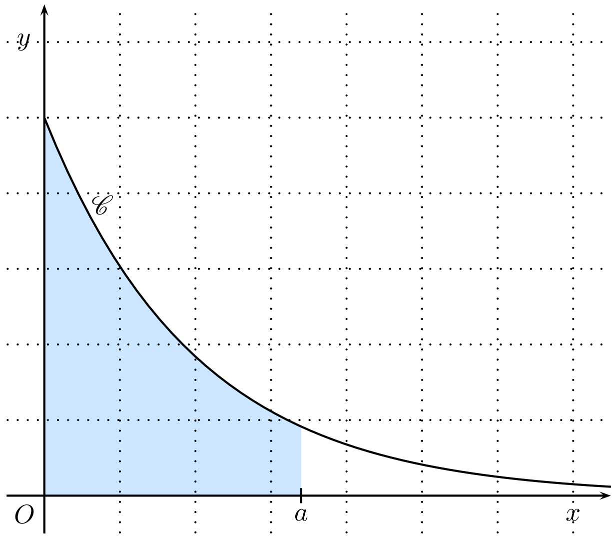
2) Soit n la taille de l'échantillon. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
L'amplitude de cet intervalle est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 100 \\ \Leftrightarrow n \geqslant 10\,000 \text{ (par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[). \end{aligned}$$

La taille minimum de l'échantillon pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit au maximum $0,02$ est 10 000.

Partie C

1) a) Interprétation graphique. $P(T \leqslant a)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré en bleu ci-dessous.



b) Soit $t \geqslant 0$.

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

c) Puisque $\lambda > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1 - 0 = 1$.

2)

$$\begin{aligned} P(T \leqslant 7) = 0,5 &\Leftrightarrow 1 - e^{-7\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-7\lambda} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow -7\lambda = \ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{7} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0,0990... \end{aligned}$$

Donc, $\lambda = 0,099$ arrondi à 10^{-3}.

3) Pour tout réel positif t, $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-0,099t}$ et donc aussi $P(T \geqslant t) = e^{-0,099t}$.

a) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 5)$.

$$P(T \geqslant 5) = e^{-0,099 \times 5} = e^{-0,495} = 0,61 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

b) La probabilité demandée est $P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 7)$. On sait que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc,

$$P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 7) = P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 5 + 2) = P(T \geqslant 5) = 0,61 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

c) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. Donc, ici, $E(T) = \dfrac{1}{0,099} = 10$ arrondi à l'unité. Ceci signifie qu'en moyenne, un composant vit 10 ans.

